

LNF-62/42

F. Uccelli: CALCOLO DELLE MATRICI DI TRANSFERT DI UN QUADRU
POLO COL MODELLO TRAPEZOIDALE.

Nota interna: n° 139
23 Maggio 1962

Nota interna: n° 139
23 Maggio 1962.

F. Uccelli^(x): CALCOLO DELLE MATRICI DI TRANSFERT DI UN QUADRUPOLO COL MODELLO TRAPEZOIDALE.

Introduzione

In questa relazione viene proposto un nuovo metodo di calcolo delle matrici di transfert di un quadrupolo. Ne viene inoltre fatta l'applicazione ad una lente magnetica di cui sono state in precedenza valutate sperimentalmente le matrici caratteristiche e vengono comparati i risultati.

Espressione dei coefficienti matriciali

Come è noto⁽¹⁾, è possibile porre le matrici di transfert di un quadrupolo sotto la forma:

$$(1) \quad M_{H,V} = \prod_i^{1..k} \left[|1| + |N_k(z)| \Delta z_k \right]$$

$$\text{ove } |1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad |N_k(z)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \pm n_k & 0 \end{vmatrix}$$

(z = asse longitudinale del quadrupolo).

Le grandezze che ivi intervengono, sono:

$$n_k(z) = \frac{3 \times 10^{-4}}{p} G_k(z) \quad (\text{cm}^{-2}) \quad \begin{array}{l} \text{positivo} = \text{defocaliz.} \\ \text{negativo} = \text{focalizzante} \end{array}$$

$G_k(z)$ = gradiente del k-esimo elemento di quadrupolo
(Gauss/cm);

(x) - I.N.F.N., Sezione di Pisa.

p = momento delle particelle (MeV/c).

Sviluppando la (1), si ottengono le seguenti espressioni per i coefficienti delle matrici:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= 1 + \int_{z_e}^{z_u} dz \int_{z_e}^z n(z) dz + \int_{z_e}^{z_u} dz \int_{z_e}^z n(z) dz \int_{z_e}^z dz \int_{z_e}^z n(z) dz + \dots \\
 m_{12} &= \int_{z_e}^{z_u} dz + \int_{z_e}^{z_u} dz \int_{z_e}^z n(z) dz \int_{z_e}^z dz + \\
 (2) \quad &+ \int_{z_e}^{z_u} dz \int_{z_e}^z n(z) dz \int_{z_e}^z dz \int_{z_e}^z n(z) dz \int_{z_e}^z dz + \dots \\
 m_{21} &= \int_{z_e}^{z_u} n(z) dz + \int_{z_e}^{z_u} n(z) dz \int_{z_e}^z dz \int_{z_e}^z n(z) dz + \\
 &+ \int_{z_e}^{z_u} n(z) dz \int_{z_e}^z dz \int_{z_e}^z n(z) dz \int_{z_e}^z dz \int_{z_e}^z n(z) dz + \dots \\
 m_{22} &= 1 + \int_{z_e}^{z_u} n(z) dz \int_{z_e}^z dz + \int_{z_e}^{z_u} n(z) dz \int_{z_e}^z dz \int_{z_e}^z n(z) dz \int_{z_e}^z dz + \dots
 \end{aligned}$$

z_e = coordinata di entrata; z_u = coordinata di uscita.

Il modello trapezoidale

Notoriamente, nel calcolo delle matrici di transfert di un quadrupolo, non è possibile servirsi della effettiva 'lunghezza geometrica' di quest'ultimo a causa del campo disperso ai bordi.

Si usa introdurre la 'lunghezza efficace' definita come:

$$L_{\text{eff}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dB_y}{dx} \right)_r dr}{\left(\frac{dB_y}{dx} \right)_0}$$

e si sostituisce alla lente effettiva una lente fittizia di lunghezza pari a L_{eff} e di gradiente costante pari al valore valutato sull'asse⁽²⁾. Questo è il cosiddetto 'modello rettangolare'.

Senonchè, anche usando nelle espressioni dei coefficienti matriciali la lunghezza efficace così definita, si ottengono valori che si discostano notevolmente da quelli che è possibile ricavare sperimentalmente con l'aiuto, ad esempio, del 'fil flottant', per cui, in pratica, si scelgono altri valori per L_{eff} ⁽³⁾.

Per ovviare a questo inconveniente, introduciamo il modello trapezoidale (v. fig. 1).

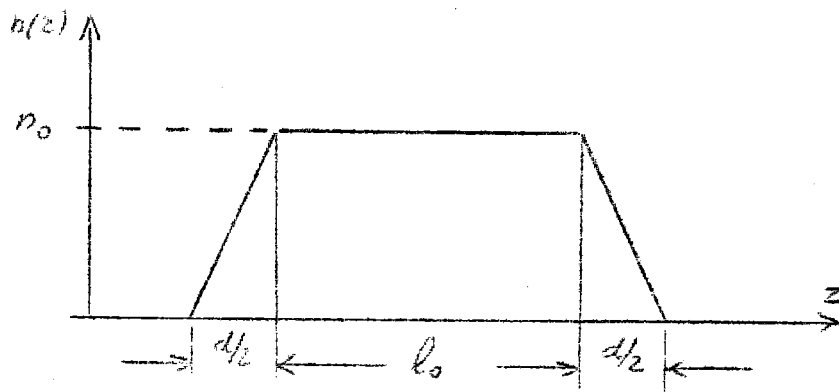


FIG. 1

Esso è definito come segue: alla lente, di spessore effettivo l_0 e di diametro d (in cui $n(z) = n_0 = \text{cost}$) vengono aggiunti due tratti di lunghezza $r = d/2$ (in cui $n(z) = h + kz$). Vengono inoltre valutate le matrici del tratto complessivo $l_0 + d$ mediante prodotto delle matrici relative ai vari tratti.

Calcolo dei coefficienti matriciali per $n = n_0 = \text{cost}$

Dalle (2), ponendo:

$$n(z) = n_0 \quad (\text{col proprio segno});$$

$$z_e = 0 ;$$

$$z_u - z_e = l_0$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= 1 + \frac{n_{o1_0}^2}{2!} + \frac{n_{o1_0}^2}{4!} + \frac{n_{o1_0}^3}{6!} + \dots \\
 m_{12} &= l_0 + \frac{n_{o1_0}^3}{3!} + \frac{n_{o1_0}^2}{5!} + \frac{n_{o1_0}^3}{7!} + \dots \\
 (3) \quad m_{21} &= n_{o1_0} + \frac{n_{o1_0}^2}{3!} + \frac{n_{o1_0}^3}{5!} + \frac{n_{o1_0}^4}{7!} + \dots \\
 m_{22} &= 1 + \frac{n_{o1_0}^2}{2!} + \frac{n_{o1_0}^2}{4!} + \frac{n_{o1_0}^3}{6!} + \dots
 \end{aligned}$$

Calcolo dei coefficienti matriciali per $n(z) = h + kz$

Dalla (2), ponendo:

$$n(z) = h + kz ;$$

$$z_e = 0$$

$$z_u - z_e = r \text{ (raggio del cerchio di gola);}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= 1 + \frac{hr^2}{2!} + \frac{kr^3}{3!} + \frac{h^2r^4}{4!} + \frac{4hkr^5}{5!} + \frac{4k^2r^6}{6!} + \dots \\
 m_{12} &= r + \frac{hr^3}{3!} + \frac{2kr^4}{4!} + \frac{1h^2r^5}{5!} + \frac{6hkr^6}{6!} + \frac{10k^2r^7}{7!} + \dots \\
 (4) \quad m_{21} &= hr + \frac{kr^2}{2!} + \frac{h^2r^3}{3!} + \frac{4hkr^4}{4!} + \frac{4k^2r^5}{5!} + \dots \\
 m_{22} &= 1 + \frac{hr^2}{2!} + \frac{2kr^3}{3!} + \frac{h^2r^4}{4!} + \frac{6hkr^5}{5!} + \frac{10k^2r^6}{6!} + \dots
 \end{aligned}$$

ove h e k valgono:

$$\begin{aligned}
 h &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{(tratto ascendente)} \\ \pm n_0 & \text{(tratto discendente, risp. defocalizzante o focal.)} \end{cases} \\
 k &\rightarrow \begin{cases} \pm \frac{n_0}{r} & \text{(tratto ascend. defoc. o foc.)} \\ - \frac{n_0}{r} & \text{(tratto discend. defoc. o foc.)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Applicazione del metodo

Applicheremo il modello trapezoidale ad un quadrupolo avente le seguenti caratteristiche:

$$l_0 = 22 \text{ cm} \quad \text{e} \quad d = 20 \text{ cm}$$

e valuteremo i coefficienti della matrice di transfert (defocalizzante) relativa allo spazio compreso tra due piani simmetrici rispetto al centro della lente e distanti tra loro 55 cm. Ciò perchè i coefficienti sperimentali in nostro possesso⁽³⁾ si riferiscono appunto a tali condizioni.

In fig. 2 l'andamento di $n(z)$ tra i due piani suddetti.

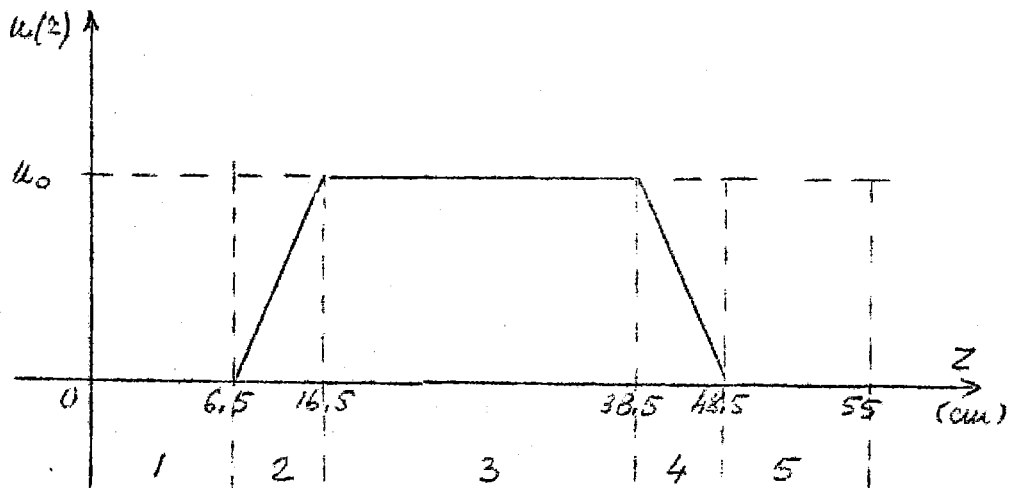


FIG. 2

Nel calcolo dei coefficienti ci si è fermati al secondo termine (termine in n_0^2) dello sviluppo in serie (2), perchè rapidamente convergente.

In appendice sono riportate le matrici relative alle cinque parti in cui è stato diviso lo spazio compreso tra il piano di entrata ed il piano di uscita, nonchè la matrice complessiva M_{def} .

In fig. 3 sono comparati i coefficienti ottenuti col modello trapezoidale ai coefficienti valutati sperimentalmente.

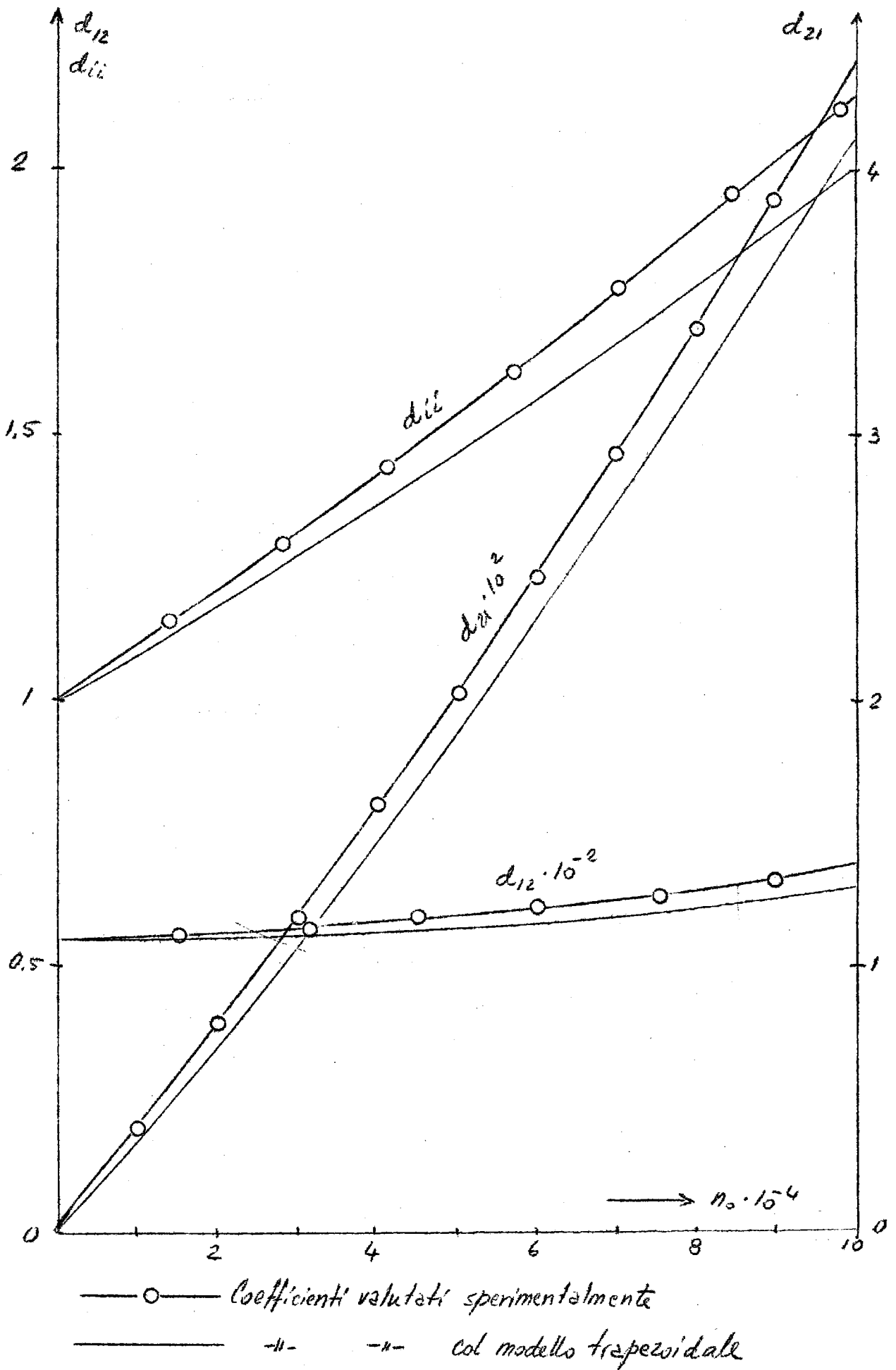


FIG. 3

Conclusioni

La concordanza ottenuta può considerarsi soddisfacente; lo scarto osservato non supera il 3% e rientra praticamente negli errori di misura di cui sono affetti i coefficienti valutati sperimentalmente.

Il modello trapezoidale può considerarsi particolarmente vantaggioso nel caso delle lenti sottili, ove il rapporto tra diametro e spessore del quadrupolo è prossimo all'unità.

Data la semplicità del metodo generale proposto dall'Ing. G. Sacerdoti, presso la Calcolatrice di Pisa è in corso la stesura di un programma per il calcolo di sistemi ottici complessi basato appunto su questo metodo.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - G. Sacerdoti: Sviluppo in serie degli elementi di matrice di un sistema ottico costituito da una serie di quadrupoli disposti su uno stesso asse Z con indice di campo $n(Z)$ - Laboratori Nazionali di Frascati, LNF 62/26.
- (2) - P. Grivet, A. Septier: Les lentilles quadrupolaires magnetiques - CERN 58-25.
- (3) - E. Braunersreuther, Chabaud, Delorme, Morpurgo: Lentilles quadrupolaires constituant le dispositif de focalisation du faisceau de mesons μ du CERN - CERN 61-12.

Appendice

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6.5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1+16.6n_0+55n_0^2+\dots; & 10+83.3n_0+198n_0^2+\dots; \\ 5n_0+33.3n_0^2+\dots & ; & 1+33.3n_0+138.8n_0^2+\dots; \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1+242n_0+9760n_0^2+\dots; & 22+1774n_0+42.947n_0^2+\dots; \\ 22n_0+1774n_0^2+\dots & ; & 1+242n_0+9760n_0^2+\dots; \end{vmatrix}$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1+33.3n_0+138.8n_0^2+\dots; & 10+83.3n_0+198n_0^2+\dots; \\ 5n_0+33.3n_0^2+\dots & ; & 1+16.6n_0+55n_0^2+\dots; \end{vmatrix}$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} 1 & 6.5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{\text{Defoc}} = \begin{vmatrix} 1+8.8 \times 10^2 n_0 + 10^5 n_0^2 + \dots; & 55 + 1.8 \times 10^4 n_0 + 2 \times 10^6 n_0^2 + \dots; \\ 32n_0 + 7 \times 10^3 n_0^2 + \dots & ; & 1 + 8.8 \times 10^2 n_0 + 10^5 n_0^2 + \dots; \end{vmatrix}$$